# Erratum

zum Titel „**Technische Hydromechanik 1**“,
8., aktualisierte Auflage, ISBN 978-3-410-29169-5

Auf den Seiten 273, 275, 276, 279 und 281 wurden
inhaltliche Korrekturen vorgenommen,
die wir Ihnen mit diesem Erratum zur Verfügung stellen.

Ihr Beuth Verlag

Beim **Rechteck** bzw. im sogenannten „ebenen Fall“ mit gleichbleibender Wassertiefe über die Breite $b$ lässt sich als weiteres, sehr einfaches Kriterium für die Fließarten Strömen und Schießen eine Kennzahl einführen, die **Froudezahl *Fr***

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{g \cdot h}}\,, \tag{6.40}$$

die in der Ähnlichkeitsmechanik des hydraulischen Versuchswesens eine bedeutende Rolle spielt. Sie ist eine dimensionslose Größe und bezeichnet das Verhältnis zwischen mittlerer Fließgeschwindigkeit $v$ und der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \sqrt{g \cdot h}$ von Oberflächenwellen (siehe Gl. (4.28) sowie Abschn. 7.2.2), wobei $h$ die Wassertiefe darstellt.

Für den Grenzzustand mit $h = h_{gr}$ und $v = v_{gr}$ wird mit Gl. (6.39)

$$Fr_{gr} = \frac{v_{gr}}{\sqrt{g \cdot h_{gr}}} = 1 \tag{6.41}$$

Bei strömendem Abfluss ist $v < v_{gr}$ und $h > h_{gr}$, somit hat der Zähler der Froudezahl einen kleineren und der Nenner einen größeren Wert, sodass die Froudezahl für Strömen $Fr < 1$ wird. Umgekehrt ist bei schießendem Abfluss $Fr > 1$. Somit gelten folgende Kriterien:

| | |
|---|---|
| Strömen | $Fr < 1$ |
| Grenzzustand | $Fr_{gr} = 1$ |
| Schießen | $Fr > 1$ |

Im Bild 6.17 sind diese Kriterien ebenfalls angegeben. Die Froudezahl spielt bei der Berechnung des Übergangs von einer Fließart in die andere und insbesondere bei der Tosbeckenberechnung (Abschn. 6.5.3) eine besondere Rolle. Bei anderen als dem Rechteckquerschnitt muss bei Verwendung der Froudezahl anstelle von $h$ eine andere geeignete Länge eingeführt werden. Eine Möglichkeit, die Froudezahl **für beliebige Querschnitte** zu ermitteln, ergibt sich mit Fließquerschnitt $A$ und Wasserspiegelbreite $b_W$ nach *Naudascher,* 1992, S. 16 allgemein zu

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{g \cdot A / b_w}} \tag{6.40a}$$

sodass damit das oben genannte Kriterium für den Rechteckquerschnitt zur Beurteilung der Fließarten Strömen oder Schießen allgemein verwendet werden kann, siehe Tafel 6.7.

### 6.4.2.3 Trapez- und Dreieckquerschnitt

**Trapez**

Ein beliebiger, unsymmetrischer Trapezquerschnitt nach Bild 6.19b mit den Böschungsneigungen $1 : m_1$ und $1 : m_2$ hat die Fläche

$$A = b \cdot h + \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot h^2$$

Nach Gl. (6.30) wird

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}h} = b + (m_1 + m_2) \cdot h_{gr} = \frac{g}{Q^2} \cdot \left[ b \cdot h_{gr} + \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot h_{gr}^2 \right]^3 \tag{6.42}$$

Nach einigen Umformungen erhält man eine Gleichung für die Grenztiefe $h_{gr}$ des Trapezgerinnes in impliziter Form

$$h_{gr} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \cdot b^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{1 + (m_1 + m_2) \cdot h_{gr}/b}}{1 + \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot h_{gr}/b} \tag{6.43}$$

wobei der erste Faktor auf der rechten Seite der Grenztiefe $h_{gr,R}$ eines Rechtecks mit der Sohlbreite $b$ entspricht. Mittels

$$b' = 2b/(m_1 + m_2)$$

lässt sich Gl. (6.43) in die dimensionslose Form bringen

$$\frac{h_{gr}}{b'} = \frac{h_{gr,R}}{b'} \cdot \frac{\sqrt[3]{1 + 2h_{gr}/b'}}{1 + h_{gr}/b'} = \frac{h_{gr,R}}{b'} \cdot k \tag{6.44}$$

Der Faktor $k$ ist auf Bild 6.20 dargestellt und ermöglicht die direkte Ermittlung der Grenztiefe beim Trapezquerschnitt. Die Grenzgeschwindigkeit $v_{gr}$, kann man über die Kontinuitätsgleichung aus $v = Q/A_{gr}$, wobei $A_{gr}$ mittels $h_{gr}$ zu bestimmen ist, berechnen. Entsprechende Umformungen ergeben

$$v_{gr} = \sqrt{g \cdot h_{gr} \cdot \frac{1 + h_{gr}/b'}{1 + 2h_{gr}/b'}} \tag{6.45}$$

und für die minimale Energiehöhe

$$h_{E\,\min} = h_{gr} \cdot \frac{3 + 5h_{gr}/b'}{2(1 + 2h_{gr}/b')} \tag{6.46}$$

**Dreieck**
Für den beliebigen, unsymmetrischen Dreiecksquerschnitt ist $A = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot h^2$ (Bild 6.19c) und damit

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}h} = (m_1 + m_2) \cdot h_{gr} = \frac{g}{Q^2} \cdot \left[ \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot h_{gr}^2 \right]^3$$

woraus sich die Grenztiefe des Dreiecks ergibt zu

$$h_{gr} = \sqrt[5]{\frac{2Q^2}{g \cdot \left( \frac{m_1 + m_2}{2} \right)^2}} \tag{6.47}$$

Des Weiteren ist

$$v_{gr} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\, g \cdot h_{gr}} \quad \text{und} \quad h_{E\,\min} = \tfrac{5}{4}\, h_{gr} \tag{6.48a, b}$$

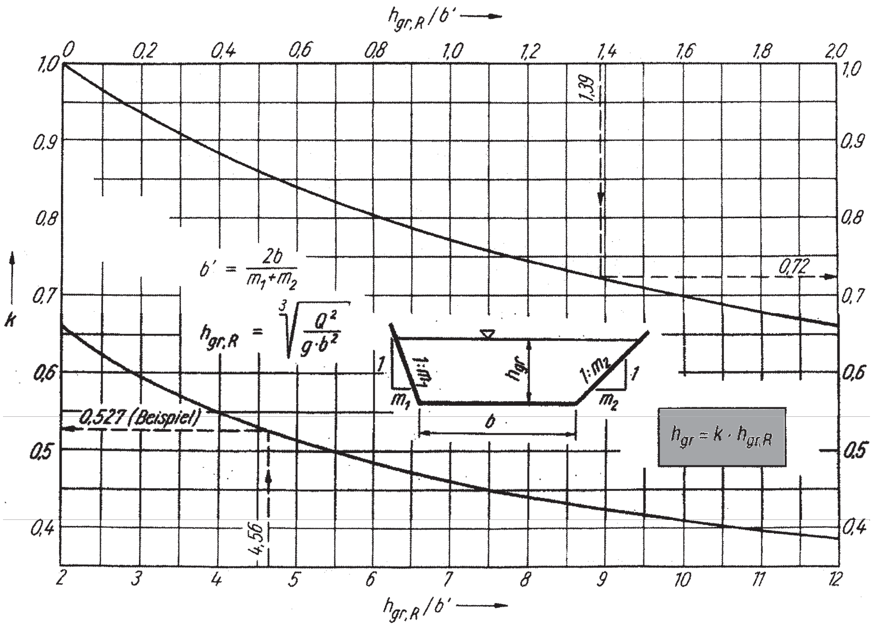


**Bild 6.20**
Grenztiefe $h_{gr}$ beim Trapezgerinne (2 Ableseteile beachten!)

**Beispiel**

Für das im Abschnitt 6.2 als Beispiel berechnete hydraulisch günstigste Trapez sind Grenztiefe, Grenzgeschwindigkeit, Grenzgefälle sowie die Froudezahl zu bestimmen.

Mit $Q = 20$ m$^3$/s, $1 : m = 1 : 2$, $I = 0{,}5$ ‰ und $k_{St} = 40$ m$^{1/3}$/s waren als hydraulisch günstigste Querschnittswerte u. a. ermittelt worden:

$$A = 18{,}23 \text{ m}^2\,, \qquad h = 2{,}72 \text{ m}\,, \qquad b = 1{,}28 \text{ m}\,, \qquad b_w = 12{,}14 \text{ m}\,.$$

Mit

$$h_{gr,R} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \cdot b^2}} = \sqrt[3]{\frac{20^2}{9{,}81 \cdot 1{,}28^2}} = 2{,}92 \text{ m}$$

und $b' = 2b/(m_1 + m_2)$ erhält man für das symmetrische Trapez mit $m_1 = m_2 = 2$

$$b' = 2 \cdot 1{,}28/(2 + 2) = 0{,}64 \text{ m}$$

Damit wird

$$h_{gr,R}/b' = 2{,}92/0{,}64 = 4{,}56$$

Bild 6.20 ergibt damit im unteren Ableseteil

$$k = 0{,}527$$

und man erhält als Grenztiefe des Trapezquerschnitts

$$h_{gr} = k \cdot h_{gr,R} = 0{,}527 \cdot 2{,}92 \text{ m} = 1{,}54 \text{ m} < h_{vorh} = 2{,}72 \text{ m}$$

Damit liegt *Strömen* vor.

Die Grenzgeschwindigkeit nach Gl. (6.45) beträgt

$$v_{gr} = \sqrt{9{,}81 \cdot 1{,}54 \cdot \frac{1 + 1{,}54/0{,}64}{1 + 2 \cdot 1{,}54/0{,}64}} = 2{,}98 \text{ m/s}$$

während die minimale Energiehöhe nach Gl. (6.46) berechnet wird zu

$$h_{E\,min} = 1{,}54 \cdot \frac{3 + 5 \cdot 1{,}54/0{,}64}{2(1 + 2 \cdot 1{,}54/0{,}64)} = 1{,}99 \text{ m}$$

Das Grenzgefälle nach Gl. (6.34) ist

$$I_{gr} = \frac{v_{gr}^2}{k_{St}^2 \cdot r_{hy,gr}^{4/3}}$$

Der hydraulische Radius bei der Grenztiefe $h_{gr} = 1{,}54$ m muss gesondert berechnet werden über

$$A_{gr} = b \cdot h_{gr} + m \cdot h_{gr}^2 = 1{,}28 \cdot 1{,}54 + 2 \cdot 1{,}54^2 = 6{,}71 \text{ m}^2$$

$$l_{u,gr} = b + 2h_{gr} \cdot \sqrt{1 + m^2} = 1{,}28 + 2 \cdot 1{,}54 \cdot \sqrt{1 + 2^2} = 8{,}17 \text{ m}$$

$$r_{hy,gr} = 6{,}71/8{,}17 = 0{,}756 \text{ m}$$

Damit wird

$$I_{gr} = \frac{2{,}98^2}{40^2 \cdot 0{,}756^{4/3}} = 0{,}00806 = 8{,}06\ ‰ > I_{vorh} = 0{,}5\ ‰$$

Die Froudezahl der vorhandenen Strömung ergibt sich mit $v_{vorh} = Q / A = 20 / 18{,}23 = 1{,}097$ m/s nach Gl. (6.40a) zu

$$Fr = \frac{v_{vorh}}{\sqrt{g \cdot A / b_w}} = \frac{1{,}097}{\sqrt{9{,}81 \cdot 18{,}23 / 12{,}14}} = 0{,}29$$

### 6.4.2.4 Kreisquerschnitt

Für Freispiegelgerinne und -stollen mit teilgefülltem Kreisquerschnitt nach Bild 6.21 gilt (siehe auch Abschn. 6.1.5)

$$A = \frac{r^2}{2} \cdot (\alpha - \sin\alpha) = \frac{d^2}{8} \cdot (\alpha - \sin\alpha) \tag{$*$}$$

$$h = r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{d}{2}\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) \tag{$**$}$$

Die vorhandene Geschwindigkeit wird aus $v = Q/A$ mit $A$ nach Gl. (∗) bestimmt. Dafür ist der Winkel $\alpha$ erforderlich, den man aus Gl. (∗∗) mit $h = 1{,}8$ m erhält zu

$$\alpha = 2 \cdot \arccos\left(1 - \frac{2 \cdot h}{d}\right) = 2 \cdot \arccos\left(1 - \frac{2 \cdot 1{,}8}{3}\right)$$
$$= 2 \cdot \arccos(-0{,}2) = 3{,}5443 \text{ rad}$$

Damit wird aus (∗) $A$ berechnet und daraus $v = v_{\text{vorh}} = Q/A$,

$$A = \frac{3^2}{8}(3{,}5443 + 0{,}3919) = 4{,}428 \text{ m}^2$$

$$v = 24{,}5/4{,}428 = 5{,}533 \text{ m/s} > v_{\text{gr}} = 4{,}45 \text{ m/s}\,.$$

Die Froudezahl wird mit $b_w = 2\sqrt{h \cdot (d-h)} = 2\sqrt{1{,}8 \cdot (3{,}0 - 1{,}8)} = 2{,}94$ m berechnet zu

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{g \cdot A / b_w}} = \frac{5{,}533}{\sqrt{9{,}81 \cdot 4{,}428 / 2{,}94}} = 1{,}39 > 1$$

Die vorhandene Energiehöhe ist

$$h_E = h + \frac{v^2}{2g} = 1{,}8 + \frac{5{,}533^2}{2 \cdot 9{,}81} = 3{,}36 \text{ m} > h_{E\,\text{min}} = 3{,}19 \text{ m}\,.$$

### 6.4.2.5 Parabelquerschnitt

Die Fließfläche eines Parabelquerschnitts $n$-ter Ordnung wird mit der Wasserspiegelbreite $b = p \cdot h^{1/n}$ (Bild 6.22a) und $p$ als Parabelparameter berechnet zu

$$A = \int_0^h b \cdot \mathrm{d}h = p \cdot \int_0^h h^{1/n} \cdot \mathrm{d}h = p \cdot \frac{n}{n+1} \cdot h^{(n+1)/n} \tag{6.54}$$

Damit und mit $\mathrm{d}A/\mathrm{d}h = p \cdot h^{1/n}$ ergibt Gl. 6.30

$$p \cdot h_{\text{gr}}^{1/n} = \frac{g}{Q^2} \cdot p^3 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 \cdot h_{\text{gr}}^{(3(n+1))/n}$$

Für die Grenztiefe folgt daraus allgemein zu

$$h_{gr} = \left[\frac{Q^2}{g \cdot p^2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^3\right]^{\frac{n}{3n+2}} \tag{6.55}$$

Für die quadratische Parabel ($n = 2$) erhält man mit $b = p \cdot h^{1/2}$; $p = b/h^{1/2}$ die Grenztiefe zu

$$h_{\text{gr}} = \sqrt[4]{\frac{27}{8} \cdot \frac{Q^2 \cdot h}{g \cdot b^2}} \tag{\textbf{6.55a}}$$

$$Q = k_{St} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot 10h \cdot h\left(\tfrac{2}{3} \cdot h\right)^{2/3} \cdot I^{1/2}$$

$$40 = 40 \cdot \tfrac{2}{3} \cdot 10h^2 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{2/3} \cdot h^{2/3} \cdot 0{,}008^{1/2}$$

$$h^{8/3} = \frac{(3/2)^{5/3}}{0{,}008^{1/2} \cdot 10} = 2{,}198 \qquad h = 1{,}343 \text{ m}$$

Damit wird $b = 10h = 13{,}43$ m und $A = \tfrac{2}{3} bh = 12{,}03$ m$^2$.

Die Fließgeschwindigkeit beträgt $v = Q/A = 40/12{,}03 = 3{,}32$ m/s.
Die Tangenten an die Parabel in Wasserspiegelhöhe schneiden sich in $2 \cdot h$ unter dem Wasserspiegel. Die Böschungsneigung beträgt dort $2h/(5h) = 1:2{,}5$. Die Grenztiefe wird nach Gl. (6.55a) berechnet:

$$h_{gr} = \sqrt[4]{\frac{27}{8} \cdot \frac{40^2 \cdot 1{,}34}{9{,}81 \cdot 13{,}43^2}} = 1{,}422 \text{ m} > h_{vorh} = 1{,}34 \text{ m}$$

Es liegt damit schießender Abfluss vor. Nach Gl. (6.58b) ist

$$v_{gr} = \sqrt{\tfrac{2}{3} \cdot g \cdot h_{gr}} = \sqrt{\tfrac{2}{3} \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}42} = 3{,}05 \text{ m/s} < v_{vorh} = 3{,}32 \text{ m/s}$$

$$Fr = \frac{v_{vorh}}{\sqrt{g \cdot A / b_w}} = \frac{3{,}32}{\sqrt{9{,}81 \cdot 12{,}03 / 13{,}43}} = 1{,}19 > 1$$

Das Grenzgefälle $I_{gr}$ beträgt mit $r_{hy,\,gr} \approx \tfrac{2}{3} \cdot h_{gr} = \tfrac{2}{3} \cdot 1{,}42 = 0{,}95$ m nach Gl. (6.34)

$$I_{gr} = \frac{v_{gr}^2}{k_{St}^2 \cdot (r_{hy,\,gr})^{4/3}} = \frac{3{,}05^2}{40^2 \cdot 0{,}95^{4/3}} = 0{,}00624 < I_{vorh} = 0{,}008$$

Damit sind alle Kriterien gemäß Tafel 6.7 untersucht, die zeigen, dass in dem vorliegenden Gerinne schießender Abfluss vorliegt. In der Regel genügt eines dieser Kriterien für den Nachweis der Fließart.

## 6.5 Fließwechsel

Der Normalabflusszustand in einem offenen Gerinne ändert sich mit einer Veränderung des Gefälles, der Wandrauheit und der Querschnittsgeometrie sowie mit einer Zu- bzw. Abnahme des Abflusses, z. B. durch Einleitung bzw. Entnahme von Wasser. Ein Fließwechsel liegt dann vor, wenn dabei der strömende Abfluss in den schießenden übergeht oder umgekehrt. Vor allem der Übergang vom schießenden zum strömenden Abfluss verlangt die erhöhte Aufmerksamkeit des Ingenieurs, weil sich die damit verbundenen Erscheinungen nicht nur maßgebend auf den Abflussprozess auswirken, sondern wesentlich die Gerinnesohle beeinflussen und bauliche, oftmals für die Sicherheit der Baumaßnahme entscheidende Konsequenzen nach sich ziehen.

### 6.5.1 Übergang vom Strömen zum Schießen

Die häufigste Ursache für den Übergang vom Strömen zum Schießen ist die plötzliche oder allmähliche Vergrößerung des Sohlgefälles $I_0$ eines offenen Gerinnes von